Mesures et incertitudes

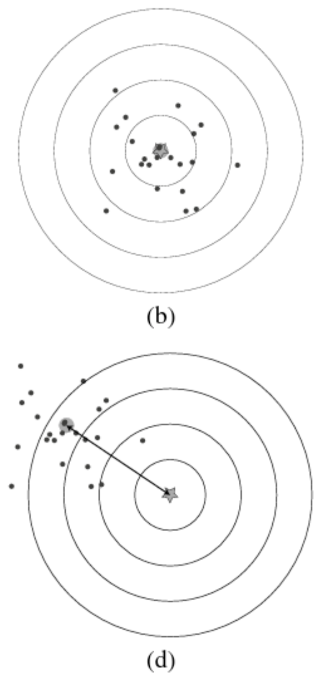
1. Un peu de vocabulaire

Définition : mesurer une grandeur physique, c'est la chiffrer par comparaison à une grandeur de même nature choisie comme unité. La représentation numérique d'une grandeur physique doit toujours être accompagnée de son unité.

- métrologie : science de la mesure
- mesurage : processus d'attribution d'une valeur expérimentale à une grandeur physique
- mesurande : grandeur soumise au mesurage (notée G)
- valeur vraie : valeur réelle de la mesurande (notée G_{vraie})
- valeur mesurée : valeur fournie par l'instrument de mesure (notée $G_{mesurée}$)
- erreur de mesure : écart entre la valeur vraie et la valeur mesurée ($= G_{mesurée} - G_{vraie}$)

Il n'est pas possible d'effectuer une mesure parfaite. Il existe toujours une erreur de mesure aussi infime soit elle. On rencontre deux types d'erreurs :
- les erreurs systématiques qui ne varient pas lors de mesures répétées
- les erreurs aléatoires

Pour mieux comprendre la différence, effectuons l'analogie avec des tirs répétés sur une cible.

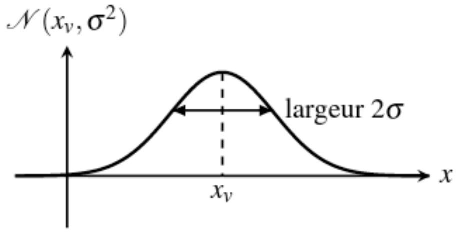


Les quatre cas ci-dessus présentent une dispersion des impacts autour d'un point central ; tous présentent donc des erreurs aléatoires. En revanche, les cas (c) et (d) présente un décalage systématique par rapport au centre de la cible.
Dans la pratique, une erreur systématique peut être due à un mauvais étalonnage de l'instrument de mesure ou à une mauvaise modélisation théorique.
Si les erreurs systématiques peuvent être corrigées, les erreurs aléatoires sont inévitables. Ainsi, il n'est possible d'avoir accès ni à la valeur vraie ni à l'erreur de mesure.

2. Incertitude de mesure

2.1. Rappel mathématique - intervalle de confiance

Soit une variable x subissant un tirage aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(x_v,\sigma)$.



On a alors les résultats statistiques suivants :

- probabilité d'un tirage dans l'intervalle $[x_v-\sigma\,;x_v+\sigma]$: 68%
- probabilité d'un tirage dans l'intervalle $[x_v-2\sigma\,;x_v+2\sigma]$: 95%
- probabilité d'un tirage dans l'intervalle $[x_v-3\sigma\,;x_v+3\sigma]$: 99,7%

En l'absence d'erreur systématique, la mesure d'une grandeur G suit une loi normale centrée sur une valeur $\overline{G}$ avec un écart-type σ_G. N'étant pas capable d'annoncer avec exactitude la valeur vraie G_{vraie}, on pourra toutefois fournir un intervalle auquel celle-ci appartient avec un certain niveau de confiance. Le résultat sera annoncé de la manière suivante :

$$G=\overline{G}\pm\sigma_G \text{ à } 68\% \text{ ou } G=\overline{G}\pm 2\sigma_G \text{ à } 95\%$$

Le terme définissant la largeur de l'intervalle de confiance (σ_G ou $2\sigma_G$) est appelé incertitude de mesure.

<u>Une mesure sera d'autant plus précise que l'incertitude sur la mesure sera faible</u>.

Il reste à établir comment évaluer expérimentalement $\overline{G}$ et σ_G. Il existe pour cela deux méthodes.

2.2. Évaluation de type A

Si elle est la plus précise, elle est aussi celle qui demande le plus de temps puisqu'elle requiert de répéter au moins 5 à 10 fois la même mesure (dans les mêmes conditions).
Soient $(G_1,\ldots,G_N)$ les valeurs mesurées au cours de N prises de mesure indépendantes. On a alors comme expression de la valeur moyenne et de l'écart-type :

$$G_{moy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}G_i$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N-1}\times\sum_{i=1}^{N}\left(G_i-G_{moy}\right)^2}$$

On identifie $\overline{G}$ à G_{moy} mais σ_G correspond à l'écart-type de la moyenne des N mesures soit :

$$\sigma_G=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

On retiendra par conséquent les formules :

$$\boxed{\begin{cases} \overline{G} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} G_i \\ \sigma_G = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\dfrac{1}{N-1} \times \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(G_i - \overline{G}\right)^2} \end{cases}}$$

Dans les cas d'une évaluation de type A de l'incertitude, on pourra utiliser la table de Student qui permet d'obtenir une expression affinée de l'incertitude en fonction du niveau de confiance désiré et du nombre de mesures effectuées.

$t_{C,N}$	$N=2$	$N=4$	$N=6$	$N=8$	$N=10$	$N=20$	∞
$C=68\%$	1,84	1,2	1,11	1,08	1,06	1,03	1
$C=95\%$	12,71	3,18	2,57	2,36	2,26	2,09	1,96

Le résultat sera donc annoncé de la manière suivante :

$$\boxed{G = \overline{G} \pm t_{C,N}\sigma_G}$$

Remarque : quelque soit le niveau de confiance, il parait évident que plus le nombre de mesures est important, plus l'incertitude est faible et la mesure précise. Toutefois, au delà de $N=10$, il faut multiplier par 100 le nombre de mesure afin de gagner un facteur 10 sur l'incertitude. Ceci ne sera donc envisageable que pour des mesures pouvant être automatisées.

2.3. Évaluation de type B

Lorsqu'une évaluation de type A n'est pas possible ou trop longue, on procède alors de manière différente, sans faire appel aux statistiques. On supposera par la suite qu'une seule mesure $\overline{G}$ de la mesurande G est réalisée.

On peut distinguer :

- un mesurage direct (exemple : la mesure d'une longueur avec une règle ou d'une tension avec un voltmètre)
- un mesurage indirect pour lequel on calcule la mesurande à partir de grandeurs mesurées (exemple : mesure de la tension U et de l'intensité du courant I pour déduire la résistance R par application de la loi d'Ohm $R=U/I$)

Suivant la recommandation d'une norme internationale, on prendra :

$$\boxed{\sigma_G = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$$

où Δ est une quantité à évaluer.

- pour un instrument de mesure gradué, Δ vaut une demi-graduation
- pour un instrument numérique, Δ est à rechercher sur la notice du constructeur
- pour certaines méthodes de mesure, Δ est à déterminer de manière empirique

➡ Dans le cas d'un mesurage direct, on a :

$$G = \overline{G} \pm \sigma_G \text{ à } 68\% \text{ ou } G = \overline{G} \pm 2\sigma_G \text{ à } 95\%$$

exemples :

- pour une mesure à l'aide d'une règle graduée, on aura $\Delta = 0{,}5\ mm$ soit

$$\sigma = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = 0{,}29\ mm$$

- pour la position d'un objet sur un banc d'optique muni d'une règle, l'évaluation de Δ dépendra plus du réglage et sera ainsi souvent supérieure à une demi-graduation.
- dans certains cas (une fiole jaugée par exemple), on identifiera Δ à la tolérance annoncée par le fabricant.

➡ Dans le cas d'un mesurage indirect, il est nécessaire de tenir compte des incertitudes de mesure sur chaque grandeur intervenant dans l'expression de G.

Soit une mesurande G calculée à partir des valeurs mesurées de plusieurs mesurandes indépendantes (trois pour notre exemple) G_1, G_2, G_3. Chacune d'elles ayant fait l'objet d'une unique mesure, on connait donc les trois valeurs mesurées $\left(\overline{G_1}\,;\overline{G_2}\,;\overline{G_3}\right)$ et leurs incertitudes respectives $\left(\sigma_{G_1}\,;\sigma_{G_2}\,;\sigma_{G_3}\right)$ (évaluation de type B). Le calcul de l'incertitude σ_G dépend de la relation liant G à G_1, G_2, G_3. On pourra dès lors utiliser les relations du tableau suivant.

Relation	Incertitude
$G = G_1 + G_2 - G_3$	$\sigma_G^2 = \sigma_{G_1}^2 + \sigma_{G_2}^2 + \sigma_{G_3}^2$
$G = \dfrac{G_1 \times G_2}{G_3}$	$\dfrac{\sigma_G^2}{\overline{G}^2} = \dfrac{\sigma_{G_1}^2}{\overline{G_1}^2} + \dfrac{\sigma_{G_2}^2}{\overline{G_2}^2} + \dfrac{\sigma_{G_3}^2}{\overline{G_3}^2}$
$G = a \times G_1$	$\sigma_G = \lvert a \rvert \times \sigma_{G_1}$

exemple :

- l'incertitude sur la mesure du volume d'une boîte parallépipédique à l'aide d'une règle graduée
  Comme on a $V = L \times l \times H$, on obtient :

$$\frac{\sigma_V^2}{\overline{V}^2} = \frac{\sigma_L^2}{\overline{L}^2} + \frac{\sigma_l^2}{\overline{l}^2} + \frac{\sigma_H^2}{\overline{H}^2}$$

  En prenant $\Delta = 0{,}5\ mm$ pour les mesures de $L = 15\ cm$, $l = 11\ cm$, $H = 6\ cm$, on obtient :

$$\overline{V} = 990\ cm^3 \text{ et } \sigma_V = 5{,}75\ cm^3$$

- pour une mesure d'un volume à l'équilibre à l'aide d'une burette graduée (avec ajustage au zéro et lecture de V_{eq}), on aura

$$V_{eq} = g_{eq} - g_0$$

  où g_{eq} et g_0 sont les graduations lues à l'équilibre et au début du dosage (ajustage du zéro). On a donc :

$$\sigma_{V_{eq}}^2 = \sigma_{g_{eq}}^2 + \sigma_{g_0}^2$$

En prenant $\Delta = 0{,}5\ ml$ pour chaque graduation, on obtient

$$\sigma_{V_{eq}} = 0{,}4\ ml$$

2.4. Ecriture du résultat

L'unité utilisée pour l'écriture du résultat devra être la même pour $\overline{G}$ et σ_G.

Peu importe le type d'évaluation utilisé pour l'incertitude σ_G, celle-ci sera généralement arrondie par excès (afin de se placer dans le cas le plus défavorable) et exprimée avec un seul chiffre significatif.

La valeur mesurée $\overline{G}$ sera arrondie au plus proche. Le dernier chiffre significatif de $\overline{G}$ doit se trouver à la même position que le dernier chiffre significatif de l'incertitude.